الفضاء المتري المتقطع :

نأخذ مجموعة ما X غير خالية ونعرف دالة المسافة .

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 ; & x \neq y \\ 0 , & x = y \end{cases}$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$$1 \leq 1 + 1$$

$$0 \leq 0 + 0$$

$$x = y \neq z \quad 0 \leq 1 + 1$$

لتكن $G_{[a,b]}$ مجموعة الدوال الحقيقية المستمرة على المجال $[a,b]$

نعرف المسافة بالصيغة التالية :

$$d(x,y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$$

أكبر الفروق بين هاتين الدالتين على المجال المعطى .

$[0, \frac{\pi}{2}]$ $x = \sin t$

$y = \cos t$

$d(x,y) = 1$ أكبر الفروق .

مثال : $y = 2$, $x = t$

أكبر الفروق = 2

الكرات المفتوحة والمغلقة :

تعريف: ليكن d . X فضاء متري

$a \in X$ ، $r > 0$ عدد حقيقي موجب.

- إن مجموعة نقاط الفضاء التي تبعد عن النقطة a بمسافة أقل من r تسمى كرة مفتوحة مركزها النقطة a ونصف قطرها العدد r ونرمز لها ب $B(a,r)$

أي: $B(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\}$ الكرة المفتوحة.

- أما مجموعة نقاط الفضاء التي تبعد عن النقطة a بمقدار أصغر أو يساوي r تسمى كرة مغلقة مركزها a ونصف قطرها r ونرمز لها بالرمز

$$\bar{B}(a,r) = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$$

- أما مجموعة نقاط الفضاء التي تبعد عن a بمقدار يساوي r تسمى سطح كرة ونرمز له بالرمز $S(a,r)$ مركزه a ونصف قطره r.

$$S(a,r) = \{x \in X : d(x,a) = r\}$$

- مثال:

نأخذ الفضاء العادي $\mathbb{R}^3$.

$a = (a_1, a_2, a_3)$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

في حالة الكرة المفتوحة

$$B(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^3 : |(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + (x_3-a_3)^2| < r\}$$

أي أنها مجموعة نقاط الفضاء التي تحقق المتراجحة (بتربيع الطرفين)

$(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + (x_3-a_3)^2 < r^2$ ما داخل الكرة

$\leq r^2$ الكرة مغلقة

السطح الكروي وما داخله

مثال : المستوي R^2

$a = (a_1, a_2)$

$x = (x_1, x_2)$

$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$

$= \{x \in R^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r\}$

بتربيع الطرفين $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$

قرص دائري مفتوح (مجموعة النقاط داخل الكرة أي يمثل كرة مفتوحة)

الكرة المغلقة من المثال السابق $\leq r^2$ يكون القرص الدائري المغلق الدائرة وما بداخلها

- أما السطح الكروي هو عبارة عن الدائرة المحيطة.

- R :

$B(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\}$

$= \{x \in R : |x - a| < r\}$

$-r < |x - a| < r$

$a - r < x < a + r$

$]a - r, a + r[$

(a-r , a , a+r)

الكرة المفتوحة في R هي مجال مفتوح

- الكرة المغلقة تكون مجال مغلق $[a - r, a + r]$

- أما سطح الكرة . النقطتين $a - r, a + r$

$S(a,r) = \{x \in X : d(x,a) = r\} = \{a - r, a + r\}$

مثال :

لنأخذ الفضاء المتري المتقطع X, d

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$$

Subject

لنفرض $r < 1$

$(r = \frac{3}{4})$

$$B(a,r) = \{x \in X : d(x,a) < r\} = \{a\}$$

لأن النقطة الوحيدة التي تبعد عن نفسها بمقدار أقل من $\frac{3}{4}$

بينما أي نقطة أخرى تبعد عنها بمقدار $\boxed{1}$

سطح الكرة:

$$S(a,r) = \{x \in X : d(x,a) = r\} = \emptyset$$

- عندما $r = 1$

مجموعة نقاط الفضاء التي تبعد عن a بمقدار أقل من $[1]$ $\{a\} = B(a,r)$ الكرة المفتوحة

هنا $[1]$ لا يوجد إلا النقطة a

$\bar{B}(a,r) = X$ الكرة المغلقة

كل نقاط الفضاء أصغر أو يساوي $\boxed{1}$

- السطح الكروي:

$$S(a,r) = X \setminus \{a\}$$

كل النقاط باستثناء a.

تعريف:

ليكن X, d فضاء متري $a \in X$ نقطة من الفضاء.

$U \subseteq X$ مجموعة جزئية من الفضاء.

نسمي المجموعة U جوارًا للنقطة a إذا وجدت كرة مفتوحة $B(a,r)$

بحيث $B(a,r) \subseteq U$

- جوار النقطة: هو أي مجموعة تحوي كرة مفتوحة مركزها هذه النقطة

- أي كرة مفتوحة مركزها a هي جوار للنقطة a.

$$B(a,r) \subseteq B(a,r)$$

من الواضح أن ما يحوي الجوار هو جوار

إذا كان U جوار لـ a، V يحوي U عندها يكون

$$B(a,r) \subseteq U \subseteq V$$

Subject

مثال: الفضاء R:

نأخذ المجموعة: $[0,2]$ هو جوار للعدد $\boxed{1}$ لأنه يحوي كرة مفتوحة مركزها $\boxed{1}$

$0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2$

$$]0,2[\subseteq [0,2]$$

$$]\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}[\subseteq [0,2]$$

- هل الجوار $[0,2]$ هو جوار للنقطة $x = 2$ ؟

لا: لأنه لا يحوي مجال مفتوح (كرة مفتوحة) مركزها $\boxed{2}$

- هل المجموعة $A=\{1,2,3\}$ جواراً لـ $\boxed{1}$ ؟

لا تحوي مجال مفتوح مركزه العدد $\boxed{1}$ ونفس الكلام عن 2 و 3.

تعريف:

ليكن X, d فضاء متري و A مجموعة جزئية من X $\quad A \subseteq X$

$a \in A$ نقطة من A.

نسمي النقطة a نقطة داخلية للمجموعة A إذا وجدت كرة مفتوحة $B(a,r)$ بحيث تكون هذه الكرة موجودة في A.

$$B(a,r) \subseteq A$$

تكون النقطة a داخلية في المجموعة A إذا كانت A جواراً لـ a.

تعريف:

إن مجموعة النقاط الداخلية للمجموعة A تسمى داخلية A ونرمز لها بالرمز: A° $\qquad A \subseteq A^{\circ}$

تعريف:

تسمى المجموعة الجزئية A من الفضاء المتري X, d مجموعة مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية.

أي: تكون المجموعة A مفتوحة إذا وفقط إذا كانت $A = A^{\circ}$

وبالتالي ذلك قولنا:

تكون المجموعة A مفتوحة إذا وفقط إذا كانت جواراً لكل نقطة من نقاطها.

انتهت المحاضرة الثانية ...